КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НИЛЬПОТЕНТНЫМИ НОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

И. Л. Сохор

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
Советская, 104, 246019 Гомель, Беларусь Irina.Sokhor@gmail.com

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Через $\mathfrak{N}$ обозначается формация всех нильпотентных групп. Формация называется наследственной, если она замкнута относительно подгрупп. Формация называется радикальной, если она является классом Фиттинга. $G^{\mathfrak{N}}$ — $\mathfrak{N}$-корадикал группы G — пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группа по которым нильпотентна; $[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а каждая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Минимальные не $\mathfrak{N}$-группы называют группами Шмидта и их свойства хорошо известны [2].

Естественно возникает задача изучения свойств группы, в которой классу $\mathfrak{F}$ принадлежат лишь некоторые собственные подгруппы, например, нормальные.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая наследственная радикальная формация. Если в разрешимой группе G, не принадлежащей $\mathfrak{F}$, каждая собственная нормальная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $G_p^G = G$, *где* $p = |G : M|$, M *— нормальная максимальная подгруппа* G*;*

2) $G/G^{\mathfrak{N}}$ *— циклическая* p*-группа;*

3) $G = G^{\mathfrak{N}} < x >$, *где* $x \in G_p$*;*

4) $G^{\mathfrak{N}} < x^p > \in \mathfrak{F}$*;*

5) $G^{\mathfrak{N}} = G'$.

Обратно, если разрешимая группа G удовлетворяет условиям 4)–5), то каждая собственная нормальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.

При доказательстве используется следующая лемма, представляющая самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая наследственная формация. Если в разрешимой группе G каждая собственная подгруппа, содержащая коммутант G', принадлежит $\mathfrak{F}$, то каждая собственная нормальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$.*

При $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ получаем обобщение групп Шмидта.

Следствие. *Пусть M — нормальная максимальная подгруппа разрешимой ненильпотентной группы G и $|G : M| = p$. Каждая собственная нормальная подгруппа группы G нильпотентна тогда и только тогда, когда $G = [G^{\mathfrak{N}}] < x >$, где $< x >$ — силовская p-подгруппа группы G и $[G^{\mathfrak{N}}] < x^p >$ нильпотентна.*

Литература

1. Huppert, B. *Endliche Gruppen I.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

2. Монахов, В. С. *Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения* // Труды Украинского математического конгресса–2001. Киев: Институт математики НАН Украины, 2001. С. 81–90.